

文章编号: 1000-7598-(2002) 06-0760-05

土坡稳定分析简化 Bishop 法的数值解

戴自航, 沈蒲生

(湖南大学 土木工程学院, 湖南 长沙 410082)

摘 要: 建立了适于边坡稳定分析简单的平面直角坐标系, 得到了该坐标系下的边坡稳定分析瑞典圆弧法的积分表达式, 与张天宝法进行了验证和对比; 提出了基于边坡稳定分析简化 Bishop 法原理的积分法, 推导了其安全系数 F_s 积分表达式, 编制了数值积分计算和图形处理程序, 并进行了工程应用, 实践证明该方法的正确性。

关 键 词: 边坡稳定; 瑞典圆弧法; 简化 Bishop 法; 积分法

中图分类号: TU 432, TB 115

文献标识码: A

Numerical solution of simplified Bishop method for stability analysis of soil slopes

DAI Zi-hang, SHEN Pu-sheng

(College of Civil Engineering, Hunan University, Changsha 410082 China)

Abstract: A right angle plane coordinate system that is applicable to analyze the stability of soil slopes is set up. The integral formulae of the stability analysis are obtained based on the Sweden slip circular method. It has been verified and compared with Zhang Tianbao method. The integral method based on the principle of the simplified Bishop method is presented to analyze the stability of slopes. The integral formula of the safety factor is deduced. The numerical calculation and figure treatment are programmed. An engineering example is cited to prove the correctness of this method.

Key words: slope stability; sweden slip circular method; simplified Bishop method; integral method

1 引 言

众所周知, 简化 Bishop 法^[1,2] (1955 年) 是土坡稳定分析极限平衡法的一种, 与古典的 Fellenius (1926 年) 瑞典条分法相比, 由于考虑了条块间水平力的作用, 得到的安全系数较瑞典条分法精度要高一些。而且, 大量实际边坡稳定分析计算表明, 对于圆弧滑面, 简化 Bishop 法计算结果与满足所有平衡条件的严格的极限平衡法 (普遍极限平衡法), 如 Janbu 法^[2]、Morgenstern 和 Price 法^[3]、Spencer 法^[4]等的计算结果相当一致, 但其计算过程要比普遍极限平衡法简单得多, 适于手算和机算。因此仍为国内外各高校土力学教程^[2]列为土坡稳定分析的主要方法, 也是目前工程中最常用的方法之一。

对于简单土坡, 根据瑞典条分法的基本原理,

我国学者张天宝 (1978 年) 推导了安全系数积分表达式, 归纳了最危险滑弧的变化规律, 并制定了可供查用的数表和曲线^[5,6], 变条分为微分, 完善了瑞典法的理论。

然而, 时至今日, 人们在采用简化 Bishop 法进行土坡稳定分析时, 仍离不开瑞典条分法的分条思想, 计算工作量仍是较大的, 且计算精度受分条粗糙程度的影响。为此, 笔者提出了基于简化 Bishop 法原理的土坡稳定分析数值积分法。

2 土坡稳定安全系数积分表达式的推导

设有简单的均质饱和土坡 $AODC$, 如图 1 所示, 坡面 OD 为单一直线斜坡, 坡高为 h , 坡度 $i = 1:m$,

收稿日期: 2001-09-24

作者简介: 戴自航, 男, 1966 年生, 博士, 副教授, 湖南大学在站博士后。主要从事边坡稳定性分析、滑坡治理、建筑基础、深基坑支护等方面的教学、研究和设计工作。

土的容重为 γ , 内摩擦角为 ϕ , 粘聚力为 c 。

为使土坡边界方程尽量简化, 建立图 1 中所示平面直角坐标系, 原点取在坡趾处。

设土坡滑动时, 滑动面 ABC 为圆弧面, 其圆心坐标为 $O(x_0, y_0)$, 半径为 R , 通常设滑弧与坡顶平面和坡底平面分别相交于 C 点和 A 点, 则土坡的边界方程为

$$y_1 = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ \frac{x}{m} & (0 < x < mh) \\ h & (x \geq mh) \end{cases} \quad (1)$$

滑动圆弧方程为

$$y_2 = y_0 - \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2} \quad (2)$$

$$(x_0 - \sqrt{R^2 - y_0^2} \leq x \leq x_0 + \sqrt{R^2 - (h - y_0)^2})$$

2.1 土坡稳定分析积分法的提出

从圆弧滑动体内取出任一单位厚度的微分土条, 土条宽度为 dx , 作用在该微分土条上的诸力如图 1 所示。

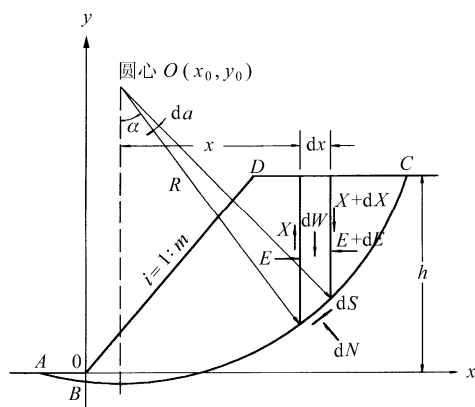


图 1 边坡稳定分析坐标系及微分土条作用力分析

Fig.1 Coordinate system for stability analysis of slopes and forces acting on differential soil slices

图中 dW 为微分土条的重量; $dW \approx \gamma (y_1 - y_2)dx$; dN 为作用在微分土条底面的法向力; dS 为微分土条底面引发的抗剪力; E 为作用在微分土条上的侧向水平推力; dE 为作用在微分土条上侧向水平推力增量; X 为作用在微分土条侧面上的竖向剪力; dX 为作用在微分土条侧面上的竖向剪力增量; α 为径向线与过圆心的铅垂线之间的夹角; $d\alpha$ 为 α 角的增量。 dl 为滑弧微分段弧长, $dl = R d\alpha$ 。

从图中还可以看出

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{x - x_0}{R} \\ \cos \alpha &= \frac{\sqrt{R^2 - (x - x_0)^2}}{R} \\ d\alpha &= \frac{dx}{\sqrt{R^2 - (x - x_0)^2}} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

按照古典的 Fellenius 瑞典条分法土坡稳定安全系数的定义^[2], 对简单均质土坡有

$$F_s = \frac{c \sum l_i + \tan \phi \sum W_i \cos \alpha_i}{\sum W_i \sin \alpha_i} \quad (4)$$

式中 令滑弧总长 $L = \sum l_i$; $N = \sum W_i \cos \alpha_i$;

$S = \sum W_i \sin \alpha_i$, 则 L , N , S 可由以下积分给出

$$L = \int_{x_0 - \sqrt{R^2 - y_0^2}}^{x_0 + \sqrt{R^2 - (h - y_0)^2}} \frac{R dx}{\sqrt{R^2 - (x - x_0)^2}} \quad (5)$$

$$N = \gamma \int_{x_0 - \sqrt{R^2 - y_0^2}}^{x_0 + \sqrt{R^2 - (h - y_0)^2}} \left(-y_0 + \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2} \right) \frac{\sqrt{R^2 - (x - x_0)^2}}{R} dx +$$

$$\gamma \int_0^{mh} \left(\frac{x}{m} - y_0 + \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2} \right) \frac{\sqrt{R^2 - (x - x_0)^2}}{R} dx +$$

$$\gamma \int_{mh}^{x_0 + \sqrt{R^2 - (h - y_0)^2}} \left(h - y_0 + \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2} \right) \frac{\sqrt{R^2 - (x - x_0)^2}}{R^2} dx \quad (6)$$

$$S = \gamma \int_{x_0 - \sqrt{R^2 - y_0^2}}^{x_0 + \sqrt{R^2 - (h - y_0)^2}} \left(-y_0 + \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2} \right) \frac{(x - x_0)}{R} dx +$$

$$\gamma \int_0^{mh} \left(\frac{x}{m} - y_0 + \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2} \right) \frac{(x - x_0)}{R} dx +$$

$$\gamma \int_{mh}^{x_0 + \sqrt{R^2 - (h - y_0)^2}} \left(h - y_0 + \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2} \right) \frac{(x - x_0)}{R} dx \quad (7)$$

在给定的积分区间内, 可得到式 (5) ~ (7) 的封闭解, 与我国学者张天宝的积分表达式及其解相类似^[5], 只是由于坐标系的建立不同而略有差别, 但计算结果是完全一致的 (对此, 下文中还将以算例说明), 进而可按式 (4) 求出土坡稳定安全系数 F_s 瑞典条分法的精确解。

2.2 土坡稳定分析简化 Bishop 法积分表达式的推导

根据 Bishop 条分法的定义^[1,2], 微分条处于静力平衡状态时, 满足竖向力平衡条件。即应有 $\sum F_y = 0$ 即

$$dN \cos(\alpha + d\alpha/2) + dS \sin(\alpha + d\alpha/2) - dW - dX = 0$$

因 $d\alpha/2$ 为微分小量, 视 $\alpha + d\alpha/2 \approx \alpha$, 则

$$dN \cos \alpha = dW + dX - dS \sin \alpha \quad (8)$$

根据满足 F_s 时微分滑弧引发的抗剪力

$$dS = \frac{1}{F_s} (cdl + dN \tan \phi) \quad (9)$$

将式 (9) 代入式 (8) 可得

$$dN = \frac{1}{m_a} \left(dW + dX - \frac{cdx}{F_s} \tan \alpha \right) \quad (10)$$

$$\text{式中 } m_a = \cos \alpha + \frac{\sin \alpha \tan \phi}{F_s}$$

视 $x - x_0 + dx/2 \approx x - x_0$, 根据滑体绕圆心满足整体力矩平衡条件, 有

$$\int_{x_0 - \sqrt{R^2 - y_0^2}}^{x_0 + \sqrt{R^2 - (h - y_0)^2}} (x - x_0) dW = \frac{R}{F_s} \int_{x_0 - \sqrt{R^2 - y_0^2}}^{x_0 + \sqrt{R^2 - (h - y_0)^2}} (cdl + dN \tan \phi) \quad (11)$$

微分条间力 E 和 X , 因成对出现, 大小相等, 相互抵消, 对圆心不产生力矩。 dN 作用方向通过圆心, 也不产生力矩。

将式 (10) 代入式 (11), 整理可得

$$F_s = \frac{R \int_{x_0 - \sqrt{R^2 - y_0^2}}^{x_0 + \sqrt{R^2 - (h - y_0)^2}} \frac{1}{m_a} [cdx + (dW + dX) \tan \phi]}{\int_{x_0 - \sqrt{R^2 - y_0^2}}^{x_0 + \sqrt{R^2 - (h - y_0)^2}} (x - x_0) dW} \quad (12)$$

式 (12) 即为 Bishop 法土坡稳定分析安全系数的积分表达式, 为便于求解, 依简化 Bishop 法的假定, 有 $dX = 0$, 即认为微分土条间只有水平力向推力 E 作用, 而不存在竖向剪力 X , 于是, 式 (12) 可进一步简化为

$$F_s = \frac{R \int_{x_0 - \sqrt{R^2 - y_0^2}}^{x_0 + \sqrt{R^2 - (h - y_0)^2}} \frac{1}{m_a} (cdx + dW \tan \phi)}{\int_{x_0 - \sqrt{R^2 - y_0^2}}^{x_0 + \sqrt{R^2 - (h - y_0)^2}} (x - x_0) dW} \quad (13)$$

式 (13) 为简化 Bishop 法土坡稳定分析安全系数的积分表达式。式中 m_a 包含 F_s , 因而不能直接求出 F_s , 一般可采用试算的办法, 迭代求解。由于在假定 F_s 的初值后, 在给定的积分区间内, 式 (13) 分子、分母可拆分成以下积分表达式

$$\int_{x_0 - \sqrt{R^2 - y_0^2}}^{x_0 + \sqrt{R^2 - (h - y_0)^2}} \frac{c}{m_a} dx = cF_s R \int_{x_0 - \sqrt{R^2 - y_0^2}}^{x_0 + \sqrt{R^2 - (h - y_0)^2}} \frac{1}{F_s \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2} + (x - x_0) \tan \phi} dx \quad (14)$$

$$\int_{x_0 - \sqrt{R^2 - y_0^2}}^{x_0 + \sqrt{R^2 - (h - y_0)^2}} \frac{dW \tan \phi}{m_a} dx =$$

$$\int_{x_0 - \sqrt{R^2 - y_0^2}}^{x_0 + \sqrt{R^2 - (h - y_0)^2}} \frac{\gamma(y_1 - y_2) \tan \phi}{m_a} dx = \gamma \tan \phi F_s R \int_{x_0 - \sqrt{R^2 - y_0^2}}^0 \frac{\left(-y_0 + \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2} \right)}{F_s \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2} + (x - x_0) \tan \phi} dx + \gamma \tan \phi F_s R \int_0^{mh} \frac{\left(\frac{x}{m} - y_0 + \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2} \right)}{F_s \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2} + (x - x_0) \tan \phi} dx \quad (15)$$

$$\int_{x_0 - \sqrt{R^2 - y_0^2}}^{x_0 + \sqrt{R^2 - (h - y_0)^2}} (x - x_0) dW = \frac{\gamma}{R} \int_{x_0 - \sqrt{R^2 - y_0^2}}^0 \left[-y_0 + \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2} \right] (x - x_0) dx + \frac{\gamma}{R} \int_0^{mh} \left[\frac{x}{m} - y_0 + \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2} \right] (x - x_0) dx + \frac{\gamma}{R} \int_{mh}^{x_0 + \sqrt{R^2 - (h - y_0)^2}} \left[h - y_0 + \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2} \right] (x - x_0) dx \quad (16)$$

式 (14), 式 (16) 可在代入各已知参数后获得两积分式的封闭解。式 (15) 可利用数值积分法^[7,8], 获得其高精度的数值解。将这 3 式的积分值, 代入式 (13), 可求得第 1 次迭代后的 F'_s , 再将 F'_s 代入式 (14) ~ (16), 又可得到第 2 次积分值, 进而再次代入式 (13), 如此反复数次, 可以极高精度收敛于该法安全系数真值。

当土坡因某原因滑动面充水时 (如图 2 所示), 可导出安全系数积分表达式为

$$F_s = \frac{\int_{x_0 - \sqrt{R^2 - y_0^2}}^{x_0 + \sqrt{R^2 - (h - y_0)^2}} \frac{1}{m_a} \left\{ cdx + \left[dW + \gamma_w \left(1 + \frac{\tan \phi \tan \alpha}{F_s} \right) (h_1 - y_2) dx \right] \tan \phi \right\}}{\int_{x_0 - \sqrt{R^2 - y_0^2}}^{x_0 + \sqrt{R^2 - (h - y_0)^2}} \sin \alpha dW} \quad (17)$$

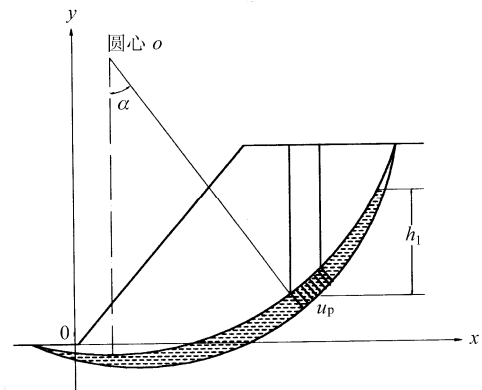


图 2 充水滑面边坡稳定分析

Fig. 2 Stability analysis of slopes for slip surface filled with water

3 验证与实例

为便于对式(15)~(17)的求解, 笔者编制了相应的数值积分计算程序, 同时, 由计算程序还可绘出下滑力矩和抗滑力矩随边坡位置变化的分布曲线。

3.1 验证算例

引用文献[5]的算例进行分析, 按张天宝瑞典积分法, 该边坡的最小安全系数 $F_s = 1.276\ 745$ 。

若在本文建立的坐标系中进行分析, 则该土坡最危险滑弧中心坐标 $x_0 = 59.21\text{ m}$, $y_0 = 134.715\text{ m}$, 半径 $R = 152.125\text{ m}$ 。边坡的边界方程为

$$y_1 = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ \frac{x}{3.25} & (0 < x < 162.5) \\ 50 & (x \geq 162.5) \end{cases}$$

滑动圆弧方程为

$$y_2 = 134.715 - \sqrt{152.125^2 - (x - 59.21)^2} \\ (-11.457\ 421\ 07 \leq x \leq 185.564\ 202\ 15)$$

将上述已知条件代入式(4)~(7), 经程序计算所得该边坡的 $F_s = 1.276\ 781\ 295$ 。可见, 和张天宝法计算结果相比, 由于分析坐标系有所不同, 以及受后者计算用表小数位的截断误差的影响, 致使二者在小数点后第5位有所区别。但一般边坡稳定安全系数 F_s 至多保留至小数点后3位就足够了, 因此, 可认为二者计算结果是完全一致的。从而证实了本文所建立的方法是正确可靠的。

若假定 F_s 的初值 (如可假定 $F_s = 1.0$), 连同已知条件代入式(13)~(16), 经程序反复迭代数次 (一般5或6次即可), 可得简化 Bishop 积分法边坡 $F_s = 1.365\ 198\ 68$ 。较瑞典积分法计算结果偏大, 符合一般结论。

3.2 工程实例

湖南长益 (长沙至益阳) 高速公路穿越某低山丘, 如图3所示, 原山坡上部可用坡度 $i=1:2.25$ 的直线近似拟合, 路基设计标高上部有部分刷方, 如图中虚线所示, 山坡下部刷方按上部相同坡度进行。路面标高与坡顶最高处标高差 h 为 46 m , 坡体土层单一、均匀, 为第四系坡积粉质粘土, 呈褐黄色, 土体容重 γ 为 18.8 kN/m^3 , 直剪快剪内摩擦角 ϕ 为 12.5° , 粘聚力 c 为 48.0 kPa 。

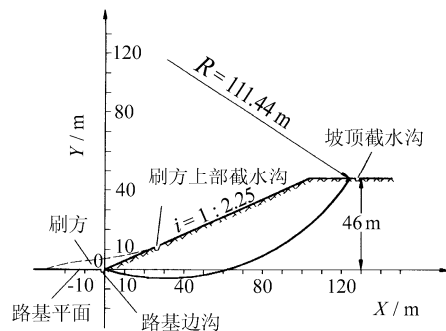


图3 长益高速公路某边坡稳定分析
Fig.3 Stability analysis of a slope near to the expressway from Changsha to Yiyang

同理可得, 该土坡在图示坐标系中最危险滑弧中心的坐标 $x_0 = 30.94\text{ m}$, $y_0 = 107.01\text{ m}$, 半径 $R = 111.44\text{ m}$ 。该边坡的边界方程为

$$y_1 = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ \frac{x}{2.25} & (0 < x < 103.5) \\ 46 & (x \geq 103.5) \end{cases}$$

滑动圆弧方程为

$$y_2 = 107.01 - \sqrt{111.44^2 - (x - 30.94)^2} \\ (-0.168\ 415\ 26 \leq x \leq 124.195\ 849\ 7)$$

由瑞典积分法和简化 Bishop 数值积分法分别计算该边坡 F_s 分别为 1.072 和 1.135 。按文献[6]规定的设计准则, 两种方法所得 F_s 均满足相应的最小容许安全系数要求, 表明虽然该边坡是偏于安全的, 但安全度不高。为避免降雨对边坡稳定的影响, 设计中, 在坡顶滑动面以后和山坡下部刷方边界上方各设置了一条截水沟、刷方坡面培植草皮, 并设置了“人”字形截排水沟, 坡脚设路基排水边沟。自1998年通车以来, 该边坡一直处于稳定状态, 未见滑坡迹象。实践证明采用文中方法对该边坡的分析和处理结果是正确的。

简化 Bishop 积分法计算所得边坡土体内部抗滑力矩和下滑力矩的分布如图4所示。

由此可见, 从坡顶至下坡方向, 起初下滑力矩逐渐增大, 但增长速率渐减, 直至达到某最大值, 此后逐渐减小, 此趋势一直延伸至坡底滑面出口处; 而抗滑力矩始终保持增大的趋势, 由小于直到等于和超过下滑力矩。边坡稳定 F_s 可由图中滑面出口处抗滑力矩与下滑力矩的比值而得到。两曲线的交点称为临界平衡点 (此例 $x = 20\text{ m}$ 处), 说明若没有其以下土体的抗滑阻挡作用, 边坡土体将从此处滑

出。若两曲线无交点,一般总抗滑力矩小于总下滑力矩,则该边坡为不稳定边坡。

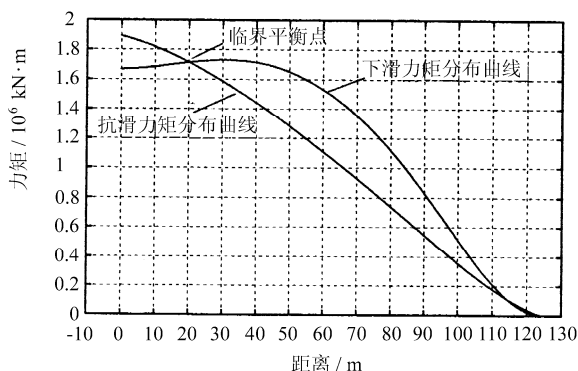


图4 土体内部抗滑力矩和下滑力矩随位置变化曲线
Fig.4 The curves of anti-sliding moment and sliding moment in the sliding mass

4 结 论

(1)在采用极限平衡积分法进行边坡分析时,建立文中所述平面直角坐标系,既符合数学分析习惯,又可使边坡及滑动圆弧方程最为简化。

(2)首次提出基于简化 Bishop 法原理的边坡稳定分析数值积分法,完善了极限平衡法的理论,避免了传统条分法分条量算的繁琐工作。和现有计算程序相比,基于文中所述方法编制的计算程序,有

效的提高了计算效率和精度,可获得该法高精度的数值解。

(3)工程实例表明,由计算程序图形处理结果,可揭示边坡土体内部下滑力矩和抗滑力矩随位置而变化的规律,有助于人们对边坡稳定问题的认识。稳定边坡有一临界平衡点;不稳定边坡,则无临界平衡点。

参 考 文 献

- [1] Bishop A W. The use of the slip circle in the stability analysis of slopes[J]. *Geotechnique*, 1955, 5: 7—17.
- [2] 陈仲颐,周景星,王洪瑾. 土力学[M]. 北京:清华大学出版社, 1997.
- [3] Morgenstern N R, Price V E. The analysis of the stability of general slip surfaces[J]. *Geotechnique*, 1965, 15(1): 79—93.
- [4] Spencer E. A method of analysis the stability of embankments assuming parallel interslice forces[J]. *Geotechnique*, 1967, 17(1): 11—26.
- [5] 张天宝. 土坡稳定分析和土工建筑物的边坡设计[M]. 成都:成都科技大学出版社, 1987.
- [6] 金问鲁, 顾尧章. 地基基础实用设计施工手册[M]. 北京:中国建筑工业出版社, 1998.
- [7] 张善杰, 唐汉, 高瑞章. 实用计算方法[M]. 南京:南京大学出版社, 1998.
- [8] 龚剑, 朱亮. MATLAB5.X 入门与提高[M]. 北京:清华大学出版社, 2000.

上接第 759 页

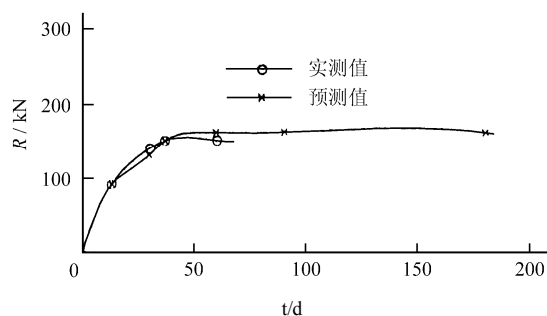


图3 单桩承载力预测实测曲线
Fig.3 The curves of forecasting and observed data of the single pile's bearing capacity

5 结 论

(1)粉喷桩单桩承载力具有明显的时间效应,可用文中提出的非等时距 GM(1,1)灰色模型进行预测,从而可用短龄期的数值来推求单桩的长期强度。

(2)该预测模型采用的是直接建模法,方法

简便易行,强化了系统的规律性,弱化了随机因素的突变作用。用所建模型对粉喷桩桩身试块强度和单桩承载力进行了灰色预测,其结果桩与实测值基本相符,该法预测精度相当高。

通过不同龄期的实测值与预测结果分析,得到了粉喷桩单桩承载力的时间效应规律。实际工程中可采用 28~35 d 时的试验值作为承载力设计值,在邯郸地区应用于多栋建筑物,均未出现问题。

参 考 文 献

- [1] JGJ79-91, 建筑地基处理技术规范 [S].
- [2] DBJ08-40-9, 上海地基处理技术规范 [S].
- [3] 梁志安, 陈静曦. 试论水泥搅拌桩单桩承载力测试[J]. 岩土力学, 1996, 17(1): 71—75.
- [4] 王义闹. GM(1,1)的直接建模方法及性质[J]. 系统工程理论与实践, 1988, 3: 1—3.
- [5] 杜海金, 史三元. 载荷试验确定粉喷桩承载力的标准探讨[J]. 工程勘察, 2001, 1: 17—19.

